SULLA
RISOLUZIONE NUMERICA DELLE EQUAZIONI

NOTA

DEL PROF. G. BELLAVITIS

Membro effettivo dell' I. R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti

(Estr. dal vol. IV, Serie III degl' Atti dell' Istituto stesso.)

Già per tre volte ebbi l' onore d' intrattenervi, o dotti colleghi, intorno a questo argomento, che è una delle vie, per le quali dalle astrazioni dell' algebra si passa alle applicazioni aritmetiche, io ricorro ancora alla vostra indulgenza, acciocchè vediate se per l' importanza dell' oggetto possa meritare di venir pubblicata nei volumi delle vostre memorie un' appendice alle due memorie che voi benignamente accoglieste nei vol. III e V (1846, 1857), in cui cercai di esporre quanto occorre ad esse aggiungere per giovare alla pratica utilità, e ciò prendendo in esame alcune opere pubblicate su tale argomento, e particolarmente quella di Schnuse (Braunschweig, 1850) che sta nella nostra biblioteca.

Questo autore comincia il suo trattato colla non facile dimostrazione che ogni equazione algebrica ha tante radici quant' è il suo grado, ed egli a buona ragione preferi-

sce quella del Cauchy poggiata sul principio che i così detti immaginarii non sono altro che le espressioni dei punti di un piano; principio questo che io da molti anni tolsi dalla quasi dimenticata rappresentazione delle quantità immaginarie, e che *ormai* è generalmente adottato. Io credo peraltro che ad ogni considerazione d'immaginarii giovi far precedere la teoria delle quantità (cioè reali), la quale e per le ragioni logiche e per le pratiche applicazioni è naturalmente staccata dall'altra. Lo studio delle equazioni algebriche è così semplice, che può far seguito immediato ai fondamenti dell'algebra; rimarrebbe soltanto da dimostrare che ogni polinomio intero di grado pari è decomponibile in fattori reali di 2.° grado; ma questo teorema, che è uno di quelli dimostrati facilmente col sussidio degl'immaginarii, non è di alcuna importanza per la determinazione delle radici reali delle equazioni.

L'operazione per risolvere ogni equazione algebrica a coefficienti numerici già presentita dal Vieta è una semplicissima conseguenza della divisione algebrica; se un polinomio si divide pel binomio $(x - a)$ il residuo darà evidentemente il valore del polinomio quando x riceve il valore a; e se il quoziente si divide ancora per $(x - a)$, e così in seguito, si ottengono i coefficienti delle varie potenze di $(x - a)$, cioè si ha la trasformata le cui radici sono diminuite della quantità a; l'osservazione della prima delle predette divisioni fa presentire come si trovi la più piccola radice di una data equazione; ecco adunque che quella trasformazione ci pone sulla via di avvicinarsi indefinitamente a ciascuna radice. Io credo che il primo ad insegnare questo processo per calcolare la trasformata sia stato il Ruffini in una sua memoria pubblicata nel 1804, e quindi tre anni prima che il Budan desse il suo metodo di

risoluzione, nel quale egli considera soltanto il caso di $a=1$, sicchè si attribuisce ordinariamente all'Horner (*Trans. phil.* 1819), anzichè al Budan quel processo che il Ruffini applicò poi (Soc. Ital. XVI, 1813) all' estrazione delle radici numeriche. Ad un metodo così semplice e così facile da dimostrare, e che probabilmente sarà stato conosciuto prima del Ruffini, non si fece abbastanza di attenzione nemmeno dopo delle pubblicazioni di Budan e di Horner; così anche il Fourier suppone che il valor della x sia sostituito nelle *derivate*, invece di adoperare i coefficienti della trasformata; uso che si vede generalmente conservato, ad onta della sua inopportunità.

Il processo per calcolare le trasformate non dà la compiuta risoluzione delle equazioni, ci voleva un qualche criterio che facesse sicuri di non trascurare qualche radice; il teorema del Cartesio serviva pienamente allo scopo quando l' equazione aveva tante radici (reali) quant' è il suo grado; ma nel caso opposto era lecito sospettare che tra due trasformate aventi nei loro coefficienti lo stesso numero di variazioni cadesse nullostante qualche radice, giacchè il numero di queste può essere inferiore a quello delle variazioni di segno; fu dunque di capitale importanza il teorema del Fourier, che diede compimento a quello del Cartesio. Questo teorema viene anche attribuito al Budan; pare che Fourier lo trovasse nel 1797, e pubblicamente lo insegnasse nel 1801; mentre il Budan nei §§ 39, 52 della sua opera (1807) non fece che sospettarne la verità, e ne era sì poco convinto che adoperava il criterio delle trasformate collaterali per mostrare l' assenza di radici anche in quegl' intervalli, nei quali non vi era alcuna perdita di variazioni; peraltro, forse nella seconda edizione della sua opera (1822), e per certo in una memoria inserita nel

Bullet. Férussac (Oct. 1829, XII, pag. 297), il Budan espose il teorema, nonchè il metodo generale per calcolare le successive trasformate; mentre pare che la prima pubblicazione del Fourier sia nell'opera postuma (1831).

Se si trattasse di determinare tutti i valori che fanno sparire qualche variazione di segno il teorema del Fourier ed il processo di calcolo Ruffini-Horner, non lascierebbe nulla a desiderare, ma fra di essi, oltre le radici, vi sono alcuni valori così detti *critici*, che nulla importa di determinare; ordinariamente la presenza dei valori critici è facile da scorgersi, e siccome il loro numero eguaglia la metà della differenza tra il grado della equazione ed il numero delle radici (reali), così non è grande inconveniente il fermarsi a trovarli; pure è utile un criterio che faccia distinguere i valori critici delle paja di radici. Abbiamo il criterio del Budan che consiste nel progredire verso il valore della cercata radice secondo il processo con cui si determina la frazione continua, finchè si giunga ad una trasformata che sia evidentemente priva di radici superiori all'unità. Abbiamo il criterio del Fourier, nel quale, combinando insieme i due ultimi termini di due trasformate si riconosce in molti casi che in quell'intervallo non può cadere alcuna radice. Non parlo del criterio perfetto dato dallo Sturm, giacchè in pratica esso riesce troppo laborioso, perchè sia opportuno adoperarlo. Abbiamo parecchi altri criterii; mi pare che quello proposto da me sia piuttosto più esteso che meno degli altri, ed abbia i vantaggi di adoperare i coefficienti di una sola delle due trasformate, e di richiedere un calcolo facile a ricordarsi, perchè quasi conforme al processo Ruffini-Horner.

Come metodo d'approssimazione io credeva che quest'ultimo fosse migliore di ogni altro; esso contiene in sè

il metodo del Newton senza che occorrano le complicate avvertenze che alcuno vi aggiunse onde evitare il pericolo di sorpassare qualche radice o di non ottenere la desiderata approssimazione; esso ha peraltro un difetto; avviene non di rado che l'equazione da risolversi sia mancante di molti termini, applicandovi il processo Ruffini - Horner l'equazione perde immediatamente la sua semplicità; da un Giornale Italiano io sapeva che nell'*Athenaeum* (Dec. 1842) il Weddle aveva pubblicato un nuovo metodo che s'assomiglia a quello dell'Horner, ma che lascia alle equazioni sempre lo stesso numero di termini; nell'opera dello Schnuse venni finalmente a conoscere questo metodo, a cui sì spesso aveva pensato (giacchè talvolta le cose semplicissime si cercano indarno), e che costituisce, a mio credere, la più importante aggiunta che debba fare al metodo già pubblicato. Per esprimere approssimatamente le quantità si hanno tre maniere principali: l'una è indipendente dal sistema di numerazione, ed è per frazioni continue; la seconda è per successive aggiunte di alcuni decimi, poscia di alcuni centesimi, di alcuni millesimi, ecc.; nella terza maniera si ha invece una specie di fattori, il primo sarà un numero intero, il secondo l'unità aumentata da uno o più decimi, il terzo l'unità aumentata di uno o più centesimi, e così in seguito. Questi fattori furono adoperati dal Leonelli per calcolare con facilità e mediante una breve tavola i logaritmi dei numeri (sarebbe desiderabile che venissero pubblicate le tavole lasciate da questo ingegnoso matematico italiano morto a Corfù). — Ora se una radice di una equazione si vuol esprimere in frazione continua vale il noto metodo del Lagrange, che è molto opportuno quando i coefficienti sono interi; se la radice vuole esprimersi nel solito modo di frazione decimale vale il metodo Ruffini-

Horner; nel quale la radice delle successive trasformata è quella della primitiva diminuita successivamente delle varie parti della radice; finalmente nel metodo del Weddlé la radice si esprime per fattori, cioè in ogni trasformata la radice differisce da quella della precedente per un fattore che vi fu tolto; ed è noto che in tal modo tutte le trasformate contengono lo stesso numero di termini della primitiva.

Il processo Ruffini-Horner ha un altro vantaggio di servire ottimamente alla teoria delle equazioni; nelle mie precedenti memorie mostrai quanto facilmente se ne ricavi il teorema del Fourier, i limiti delle radici, e gli altri teoremi; sicchè è ormai inopportuno esporli quali un tempo s' insegnavano, e giova riunire invece tutta la teoria delle equazioni intorno al processo di calcolo che serve al suo scopo principale, cioè alla risoluzione delle equazioni.

Nulla ho da aggiungere intorno alla determinazione delle radici immaginarie delle equazioni a coefficienti reali, poichè lo Schnuse dà soltanto il metodo di Rutherford, e siccome egli stesso dichiara che è utile soltanto fino al 4.° grado, così non val la pena di occuparsene, giacchè rispetto alle equazioni di 4.° grado si ha un metodo diretto e spedito per la loro decomposizione in due fattori di 2.° grado. Credo che il metodo da me proposto (1846) sia finora il meno laborioso, ed ignoro che prima esso fosse conosciuto, quantunque in un' opera pubblicata a Padova (1857) lo vegga riportato senza citarmi, il che farebbe supporre che fosse cosa già nota.

Venezia, 1859. Tip. Antonelli